PROCESO DE ADMISIÓN 2010

EL MERCURIO

2 DE JULIO DE 2009

DOCUMENTO OFICIAL

PSU®

ediciones especiales

Resolución Modelo Oficial Prueba Matemática Parte II

LA PRIMERA PARTE DE LA RESOLUCIÓN DEL MODELO OFICIAL DE LA PRUEBA DE MATEMÁTICA SE PUBLICÓ EL 4 DE JUNIO. EN ESTA SEGUNDA OPORTUNIDAD, PODRÁS ENCONTRAR TODO EL MATERIAL NECESARIO PARA ANALIZAR LAS PREGUNTAS N°19 A LA 36, QUE CORRESPONDEN AL EJE TEMÁTICO DE ÁLGEBRA Y FUNCIONES.

Universidad de Chile
VICERRECTORÍA DE ASUNTOS ACADÉMICOS
DEMRE

CONSEJO DE RECTORES
UNIVERSIDADES CHILENAS

N°12 SERIE DEMRE - UNIVERSIDAD DE CHILE

RESOLUCIÓN DEL MODELO OFICIAL DE MATEMÁTICA

PARTE II

PRESENTACIÓN

Continuando con la difusión del Modelo Oficial de Matemática publicado el 07 de mayo de 2009, en esta ocasión se comentarán las preguntas Nº 19 a la Nº 36, que se refieren al Eje Temático de Álgebra y Funciones, en donde se detalla el contenido involucrado en cada una de las preguntas, los contenidos previos que se deben dominar, además, se señalan las operaciones realizadas, el grado de dificultad, el porcentaje de omisión de cada una de ellas y los errores más frecuentes que llevan al postulante a marcar los distractores.

Por otro lado, para la resolución de las preguntas del Modelo Oficial, el alumno debe ser capaz de llegar a la respuesta correcta utilizando los contenidos del marco curricular y las habilidades cognitivas de Reconocimiento, Comprensión, Aplicación y de Análisis, Síntesis y Evaluación, cuyo desglose se realizó en la publicación del 09 de abril.

Cabe mencionar, que los contenidos de Álgebra y los de Funciones son fundamentales para resolver problemas, tanto en el ámbito matemático como en el ámbito referido a otras disciplinas, es así como, los conceptos y los algoritmos matemáticos facilitan la resolución de una gran cantidad de problemas que se presentan en lo cotidiano. Se debe recordar que los contenidos de Álgebra son tratados en los niveles de primer a tercer año medio y los de Funciones en los niveles de segundo a cuarto medio.

COMENTARIOS DE LAS PREGUNTAS REFERIDAS AL ÁREA TEMÁTICA DE ÁLGEBRA

PREGUNTA 19

$\left(5\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right) =$

A) $-25\sqrt{5}$
B) $2\sqrt{5}$
C) 7
D) 47
E) 0

COMENTARIO

Para resolver el ítem, al alumno le ayuda el recordar raíces cuadradas, sus propiedades y el producto notable de la suma por diferencia, es decir, $(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$.

Es así como, en el segundo factor del producto $\left(5\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)$ se ordenan sus términos, para aplicar el producto de suma por diferencia y el cuadrado de una raíz, obteniéndose $\left(5\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) = \left(5\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 25\cdot 2 - 3 = 50 - 3 = 47$. Luego, la opción correcta es D).

Esta pregunta resultó difícil, la contestó correctamente el 33,9% de los estudiantes que la abordaron y su omisión fue del 46,2%. Llama la atención estos porcentajes, ya que este tipo de ítem se supone que es rutinario y bastante publicitado.

Uno de los distractores más marcados fue E) con un 5,4%, tal vez los alumnos operaron de la siguiente manera:

$$\left(5\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} - 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 5\sqrt{6} - 5\sqrt{6} = 0$$

PREGUNTA 20

El número $\sqrt{2^{16}}$ es igual a

A) 2^4
B) $\sqrt{32}$
C) $(\sqrt{2})^4$
D) 2^{14}
E) ninguno de los anteriores.

COMENTARIO

Los contenidos que el alumno debe dominar para contestarlo correctamente son: raíz cuadrada y propiedades de las potencias, en este caso, potencia elevada a potencia.

En efecto, se debe descomponer la cantidad subradical al número $\sqrt{2^{16}}$ y luego, aplicar raíz cuadrada, es decir, $\sqrt{2^{16}} = \sqrt{2^{2\cdot 8}} = \sqrt{\left(2^8\right)^2} = 2^8$.

Otra forma de resolverlo, es interpretar $\sqrt{a}$ como $a^{\frac{1}{2}}$, entonces

$\sqrt{2^{16}} = \left(2^{16}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{16}{2}} = 2^8$. De esta forma, la opción correcta es E).

Este ítem resultó difícil, lo contestó correctamente el 34,1% y su omisión sobrepasó el tercio de los alumnos que abordaron la pregunta. Se deduce de estos resultados que los alumnos no saben trabajar con este tipo de problemas o sencillamente desconocen el tópico.

El distractor más marcado por los postulantes fue B) (10,7%), lo más probable es que quienes se inclinaron por él, hicieron una errónea aplicación de la definición de la potencia, o sea, $\sqrt{2^{16}} = \sqrt{2\cdot 16} = \sqrt{32}$.

PREGUNTA 21

Si $3^x + 3^{-x} = P$, entonces $9^x + 9^{-x}$ es igual a

A) P^2
B) $P^2 + 2$
C) $P^2 – 2$
D) $P^2 – 1$
E) 3P

COMENTARIO

En esta pregunta, el contenido está referido a potencia con exponente entero, multiplicación de potencias de igual base y el desarrollo de un binomio al cuadrado.

El alumno debe reconocer que hay una relación entre los datos del enunciado y lo que se pide. Es así como, de la igualdad $3^x + 3^{-x} = P$, se debe encontrar una expresión para $9^x + 9^{-x}$.

Entonces, en $3^x + 3^{-x} = P$, se eleva al cuadrado a ambos lados de la igualdad, o sea, $(3^x + 3^{-x})^2 = P^2$, se desarrolla el cuadrado del binomio, llegando a $(3^x)^2 + 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} + (3^{-x})^2 = P^2$, aplicando propiedades de potencias se obtiene $9^x + 2\cdot 3^0 + 9^{-x} = P^2$, que es igual a $9^x + 2 + 9^{-x} = P^2$, se suma el inverso aditivo de 2 a ambos lados de la igualdad y se obtiene $9^x + 9^{-x} = P^2 – 2$.

Por lo que la alternativa correcta es la opción C).

Esta pregunta resultó muy difícil, pues la contestó correctamente sólo el 7,1% de los estudiantes que la abordaron, llegando la omisión al 36,3%. Estos resultados demuestran que los postulantes no saben resolver itemes, en donde la resolución de él no sea directa, o simplemente no se sienten seguros de responderlo.

Los distractores más marcados fueron A) y E), con un 26,1% y 26,2%, respectivamente.

Para llegar al distractor A), el error que posiblemente cometen es desarrollar mal el binomio al cuadrado, esto es, sólo elevan al cuadrado cada uno de los términos, es decir, de la igualdad $3^x + 3^{-x} = P$ obtienen, $(3^x)^2 + (3^{-x})^2 = P^2$, llegando a $9^x + 9^{-x} = P^2$.

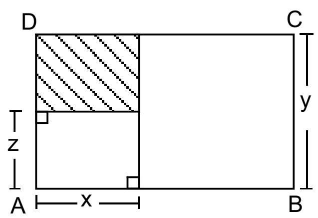
En el caso de E), en $3^x + 3^{-x} = P$ multiplican por 3 a ambos lados de la igualdad, $3(3^x + 3^{-x}) = 3P$, obteniendo $3 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{-x} = 3P$, luego realizan una multiplicación errónea, obteniendo $9^x + 9^{-x} = 3P$.

PREGUNTA 22

En la figura 3, si ABCD es un rectángulo, entonces el área de la región achurada se expresa como

A) $x(z - y)$
B) $x(y - z)$
C) xz
D) $\frac{xy}{2}$
E) $\frac{x(z + y)}{3}$

fig. 3



COMENTARIO

Esta pregunta está relacionada con el contenido del análisis de fórmulas de áreas. El postulante debe tener la capacidad de comprender el enunciado para luego calcular el área de la región achurada, contenido tratado en Enseñanza Básica.

Como ABCD es un rectángulo y considerando los ángulos rectos marcados en su interior se tiene que la región achurada tiene sus cuatro ángulos interiores rectos, por lo tanto, su área es igual al producto de dos de sus lados contiguos. Además, BC = AD = y, con lo cual se concluye que uno de los lados de la región achurada es $(y - z)$ y el otro es x. Luego, el área de esta región es $x(y - z)$, fórmula que es válida para cualquier medida que tomen sus lados, de esta manera la opción correcta es B).

Estadísticamente, esta pregunta resultó difícil, la contestó bien sólo el 36,3% de los alumnos que la abordaron. Llama la atención la alta omisión (37,9%), lo que demuestra que los estudiantes no están habituados a trabajar problemas que relacionan el Álgebra con la Geometría.

Al analizar los distractores, desde el punto de vista de los resultados obtenidos, la opción C) fue la más marcada y el error que seguramente cometen los alumnos, es asumir que los dos rectángulos pequeños interiores que se forman en el rectángulo ABCD son congruentes, por lo tanto, los lados del rectángulo achurado son x y z, así su área es xz.

PREGUNTA 23

La suma de los cuadrados de tres números enteros consecutivos es igual a 291. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa al planteamiento algebraico de este problema?

A) $[x + (x + 1) + (x + 2)]^2 = 291$
B) $x^2 + (x^2 + 1) + (x^2 + 2) = 291$
C) $(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = 291$
D) $(x - 1)^2 x^2 (x + 1)^2 = 291$
E) $x^2(x^2 + 1)(x^2 + 2) = 291$

COMENTARIO

En este ítem el alumno debe tener la capacidad de comprender, interpretar y expresar los datos del enunciado a través de una igualdad de expresiones algebraicas.

Es así como, si se designa por x uno de estos tres números enteros se tiene que su antecesor es $(x - 1)$ y su sucesor es $(x + 1)$, luego la suma de los cuadrados de cada uno de ellos que es igual a 291, está dada por $(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = 291$, igualdad que se encuentra en la opción C).

El 28,3% de los estudiantes que abordaron el ítem lo contestaron correctamente, resultando una pregunta difícil. La omisión fue alta alcanzando al 37,6%, este valor puede reflejar que los alumnos no están del todo habituados a traducir a expresiones algebraicas un enunciado.

La alternativa más marcada por los alumnos fue A) (11,7%) y corresponde a aquellos que saben escribir la expresión de los tres números enteros consecutivos, pero elevan al cuadrado la suma de todos ellos y no elevan cada una de las expresiones.

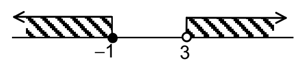
PREGUNTA 24

El gráfico que representa al conjunto solución del sistema de inecuaciones $\begin{array}{l} 3x - 6 < 3 \\ 4 - 2x \leq 6 \end{array}$ es

A) ϕ

B) 

C) 

D) 

E) 

COMENTARIO

El tópico que se debe saber en esta pregunta es el relacionado con sistemas de inecuaciones lineales sencillas con una incógnita. El alumno debe resolver cada una de las inecuaciones del sistema para luego intersectar los conjuntos solución de cada una y obtener la respuesta a la pregunta.

En efecto, en la inecuación $3x - 6 < 3$, se suma el inverso aditivo de -6 a cada lado de la inecuación, de donde se obtiene que $3x < 9$, luego se multiplica por el recíproco de 3 a cada lado de la inecuación, para obtener que $x < 3$. El siguiente gráfico representa a todos los números reales que son menores que 3:

Ahora, en la inecuación $4 - 2x \leq 6$, se suma el inverso aditivo de 4 a cada lado de la inecuación, resultando $-2x \leq 2$, se multiplica por el recíproco de -2 a cada lado de la inecuación, se llega a $x \geq -1$, se debe recordar que cuando se multiplica por un número negativo una inecuación se obtiene una inecuación equivalente, donde el signo de la desigualdad cambia de sentido. El gráfico que representa a esta desigualdad es:

Por lo tanto, el conjunto solución para el sistema planteado, es la intersección que se produce de estos dos gráficos, es decir,

Luego, la clave se encuentra en la opción E).

Esta pregunta resultó difícil, fue contestada por el 26,9% de los estudiantes que la abordaron y la omisión fue bastante alta, llegando al 54,1%. Esta alta omisión se puede deber a un dominio parcial del contenido o a un desconocimiento de éste.

Al analizar los distractores, el más elegido por quienes abordaron la pregunta fue D), con un 8,3%, el error que cometen los alumnos, seguramente es que en la inecuación $4 - 2x \leq 6$, no cambian el sentido de la desigualdad, obteniendo $x \leq -1$ y concluyen que la inecuación $3x - 6 < 3$ es igual a $-6 - 3 < -3x$, obteniendo $-9 < -3x$, luego multiplican por el recíproco de -3 a ambos lados de la inecuación sin cambiar el sentido de la desigualdad llegando a $3 < x$. Por último, unen los dos conjuntos soluciones en vez de intersectarlos, por lo que su representación gráfica es el distractor D).

PREGUNTA 25

Para que la expresión $\dfrac{1-\dfrac{x+y}{x-y}}{1+\dfrac{x+y}{x-y}}$ sea positiva, se debe cumplir necesariamente que

A) $xy < 0$
B) $x < 0$
C) $xy > 0$
D) $y < 0$
E) $x > y$

COMENTARIO

En este ítem el alumno debe trabajar con fracciones algebraicas, para ello debe sumar fracciones, factorizar y simplificar el numerador con el denominador de la fracción resultante. Después, debe hacer un análisis de la expresión resultante para determinar las condiciones necesarias para que la fracción sea positiva.

Es decir, $\dfrac{1-\dfrac{x+y}{x-y}}{1+\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{\dfrac{x-y-x-y}{x-y}}{\dfrac{x-y+x+y}{x-y}} = \dfrac{-2y(x-y)}{2x(x-y)} = \dfrac{-y}{x}$.

Para que una fracción sea positiva el numerador y el denominador deben serlo, o bien ambos deben ser negativos, luego $\dfrac{-y}{x}$ es positiva, cuando se cumplen las desigualdades ($-y > 0$ y $x > 0$) o ($-y < 0$ y $x < 0$). Entonces, del primer paréntesis, si $-y > 0$ y $x > 0$, se tiene que $y < 0$ y $x > 0$, por lo que $xy < 0$. Ahora, del segundo paréntesis, si $-y < 0$ y $x < 0$, se tiene que $y > 0$ y $x < 0$, por lo tanto $xy < 0$. Como en ambos casos se llega a que $xy < 0$, la clave es la opción A).

Este ítem resultó muy difícil, porque lo contestó correctamente sólo el 9% de los estudiantes que lo abordaron y la omisión fue muy alta, alcanzando al 58%. Estos valores hacen pensar que los alumnos no dominan a cabalidad el contenido o no están acostumbrados a trabajar con este tipo de preguntas en donde la respuesta no sea una expresión, sino una condición. Además, requiere que el estudiante haya desarrollado las habilidades de orden superior, como el análisis de situaciones.

El distractor con el mayor porcentaje de preferencias fue C), con un 13%, posiblemente quienes se inclinaron por él, operaron mal la fracción algebraica obteniendo $\dfrac{y}{x}$, entonces asumen que esta fracción es mayor que cero cuando $xy > 0$.

COMENTARIOS DE LAS PREGUNTAS REFERIDAS AL ÁREA TEMÁTICA DE FUNCIONES

PREGUNTA 26

Dado el sistema $\begin{array}{l|} x + y = 7a + 3b \\ x - y = 7a - 3b \end{array}$, el valor de **y** es

A) 0
B) 3b
C) 6b
D) 7a
E) 14a

COMENTARIO

Esta pregunta está referida al contenido que involucra resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y con coeficientes literales. En ella es necesario aplicar algún método de resolución que permita encontrar el valor de las incógnitas, en este caso se usará el de reducción.

Como se necesita encontrar el valor de y, en el sistema dado se multiplica la ecuación $x - y = 7a - 3b$ por -1, a ambos lados de la igualdad, obteniéndose el sistema,

$$\begin{array}{r|} x + y = 7a + 3b \\ -x + y = -7a + 3b \end{array}$$

Luego, al sumar los términos de ambas ecuaciones se obtiene $2y = 6b$, lo que es equivalente a $y = 3b$, dicho valor para y se encuentra en la opción B).

Esta pregunta resultó con un 42,6% de respuestas correctas, por lo que se considera un ítem de dificultad mediana. Cabe mencionar que a pesar de ser un contenido que se supone es trabajado por parte de los profesores, su omisión alcanzó un 34,2%, lo que demuestra que el alumno no sabe trabajar con sistemas de ecuaciones con coeficientes literales.

Uno de los distractores más marcado fue C), con un 4,5%, posiblemente los alumnos se quedan con el valor de 2y.

PREGUNTA 27

Una fábrica de lámparas tiene un costo fijo de producción de \$ 1.000.000 mensuales y costos varios por lámpara de \$ 5.000. Si **x** representa el número de lámparas producidas en un mes, ¿cuál de las siguientes expresiones representa la función **costo** C(x)?

A) $C(x) = x + 1.005.000$
B) $C(x) = 1.000.000x + 5.000$
C) $C(x) = 1.005.000x$
D) $C(x) = 5.000x + 1.000.000$
E) $C(x) = (x - 5.000) + 1.000.000$

COMENTARIO

El contenido de este ítem está relacionado con una función que modela una situación contextualizada.

El postulante debe comprender e interpretar el texto del enunciado, para luego escribir la función que modela el costo C(x).

Del enunciado se desprende que el costo fijo mensual de producción de lámparas es \$ 1.000.000 y que el costo de cada lámpara que se fabrica es de \$ 5.000. Si **x** representa el número de lámparas que se fabrican en un mes, entonces el costo total se expresa como $5.000x + 1.000.000$, expresión que se encuentra en la opción D).

Esta opción fue contestada por el 46,4% de los alumnos que abordaron el ítem, siendo éste de dificultad mediana. En él, la omisión llegó al 32,6%.

El distractor más marcado por los estudiantes fue B), con un 7,6%, lo más probable es que quienes optan por esta opción hayan hecho una mala interpretación del texto, considerando que al costo fijo (\$ 1.000.000) se le tiene que multiplicar por la cantidad de lámparas producidas (x), más el costo de fabricar cada lámpara (\$ 5.000).

PREGUNTA 28

El conjunto solución (o raíces) de la ecuación $x^2 + 1 = x + 1$ es

A) {0}
B) {1}
C) {0, 1}
D) {0, –1}
E) ninguno de los conjuntos anteriores.

COMENTARIO

El contenido que esta pregunta mide es la resolución de ecuaciones de segundo grado, para esto el alumno debe igualar la ecuación a cero y determinar los valores de x.

A continuación se presentan dos maneras de hacerlo:

La primera es por factorización. De la ecuación $x^2 + 1 = x + 1$, se suma el inverso aditivo de 1 y de x, a ambos lados de la igualdad y se obtiene $x^2 - x = 0$, luego al factorizar por x, resulta $x(x - 1) = 0$. Aquí, el postulante debe saber que un producto es igual a cero cuando uno o ambos factores es igual a cero, en este caso, $(x = 0)$ o $(x - 1) = 0$, de donde $(x = 0)$ o $(x = 1)$, lo que da como solución el conjunto $\{0, 1\}$.

La segunda manera de resolverlo, es por completación de cuadrados. Se debe recordar que completación de cuadrados es formar un trinomio cuadrado perfecto de la forma $x^2 + 2ax + a^2$, en este caso se tiene $x^2 - x = 0$, por lo que $2a = -1$, luego $a = -\frac{1}{2}$, el término que falta para completar el trinomio es $a^2 = \frac{1}{4}$, entonces a la expresión $x^2 - x = 0$ se le suma $\frac{1}{4}$ a ambos lados de la igualdad obteniéndose, $x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, se factoriza el trinomio como cuadrado perfecto y se tiene $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, se aplica raíz cuadrada a ambos lados llegando a $\left(x - \frac{1}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}$, por lo tanto existen dos posibles valores para x, $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ó $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$. Lo que da como solución el conjunto $\{0, 1\}$, que se encuentra en la opción C).

Estadísticamente esta pregunta resultó difícil, la contestó correctamente sólo el 22,9% de los alumnos y su omisión fue de un 46,9%. Estos valores demuestran que el alumno posee un bajo dominio del contenido o simplemente desconocen el tópico.

El distractor A) fue el más marcado con un 9,1% y corresponde a aquellos alumnos que posiblemente reemplazan directamente el 0 en la ecuación dada, sin hacer un mayor análisis.

PREGUNTA 29

¿En cuál(es) de las siguientes expresiones el valor de **x** es –3?

I) $4^x = \frac{1}{64}$
II) $4^3 \cdot 4^x = 1$
III) $(4^{-1})^x = 64$

A) Sólo en I
B) Sólo en II
C) Sólo en III
D) Sólo en I y en II
E) En I, en II y en III

COMENTARIO

El contenido abordado en esta pregunta es de ecuaciones exponenciales. En este ítem el alumno debe analizar la verdad o falsedad de las igualdades y para ello, debe recordar las propiedades de las potencias, en este caso, potencia de una potencia, multiplicación de potencias de igual base y la propiedad de potencia con exponente negativo.

Como $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, en la igualdad de I) se tiene $4^x = \frac{1}{4^3}$, ésta se escribe como $4^x = 4^{-3}$ y como las bases de las potencias son iguales, se llega a que x = –3. Por lo que I) es verdadera.

En II), en la igualdad $4^3 \cdot 4^x = 1$, se multiplican potencias de igual base y se llega a $4^{3+x} = 1$, pero se sabe que $1 = 4^0$, entonces se tiene $4^{3+x} = 4^0$, como las bases son iguales, se obtiene 3 + x = 0, de donde se determina que x = –3, por lo tanto II) es verdadera.

En III), en la igualdad $(4^{-1})^x = 64$ se aplica la propiedad de potencia de una potencia, resultando $4^{-x} = 4^3$, como las bases son iguales se tiene que –x = 3, de donde x = –3, así III) es verdadera. Por lo anterior, la opción correcta es E).

Esta pregunta resultó difícil, fue contestada correctamente por el 36,8% de los alumnos que la abordaron y un tercio la omitió.

El distractor más marcado por quienes contestaron erróneamente la pregunta fue C), con un 9%, probablemente los postulantes en I) no supieron aplicar la propiedad $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ y en II) no recordaron que $a^0 = 1$.

PREGUNTA 30

Dada la función $f(x) = 2|1-x| - x$, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

I) $f(-2) = f(-1)$
II) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$
III) $f(2) = 0$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) Sólo II y III

COMENTARIO

El alumno para resolver correctamente el ítem debe recordar la definición de la función valor absoluto para aplicarla en los valores dados y así verificar si se cumplen las igualdades de I), de II) y de III).

En I), se calcula $f(-2) = 2|1-(-2)| - (-2) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$, luego se calcula $f(-1) = 2|1-(-1)| - (-1) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, como $f(-2) \neq f(-1)$, I) es falsa.

En II), se calcula $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left|1-\frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, de donde II) es verdadera.

En III), se determina $f(2) = 2|1-2| - 2 = 2 \cdot 1 - 2 = 0$, por lo que III) es verdadera.

De este modo la alternativa correcta es E).

La estadística nos muestra que el ítem resultó difícil, porque fue contestado en forma correcta por el 19,6% de los alumnos que lo abordaron. Llama la atención la omisión (61,4%), este alto porcentaje es tal vez debido a que no han trabajado la función valor absoluto en la forma que la presenta este ítem.

El distractor más llamativo fue B), con un 7,3%, los alumnos que lo marcaron seguramente no reconocen el símbolo de valor absoluto y usan las barras como un paréntesis trabajando con operatoria de números enteros o bien se equivocan al operar con los números enteros.

PREGUNTA 31

Si $f(x) = \log_2 x$, entonces $f(16) - f(8)$ es

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 7

COMENTARIO

El contenido que corresponde a esta pregunta es el de función logarítmica. Además, el alumno debe recordar la propiedad $\log_b b^n = n$.

Así, $f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ y $f(8) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$. Luego, $f(16) - f(8) = 4 - 3 = 1$, respuesta que se encuentra en la opción A).

A pesar de ser un ítem de aplicación de una propiedad de los logaritmos, resultó difícil, pues lo contestó correctamente sólo un tercio de los estudiantes que lo abordaron. Además, obtuvo una alta omisión del 45,6%, lo que demuestra que es un contenido que dominan poco los estudiantes o sencillamente lo desconocen.

Uno de los distractores más elegido fue D), con un 9,7%, y corresponde a aquellas personas que aplican mal la definición de logaritmo, es decir,
$f(16) - f(8) = \log_2 16 - \log_2 8 = 8 - 4 = 4$.

PREGUNTA 32

Si $f(x) = x^2 + 3x - 4$, entonces $f(x + 1)$ es igual a

A) $x^2 + 3x - 2$
B) $x^2 + 5x - 3$
C) $x^2 + 5x - 2$
D) $x^2 + 5x$
E) $x^2 + 3x$

COMENTARIO

En este ítem el alumno debe reemplazar en la función cuadrática la variable x por (x + 1), para luego desarrollar productos notables y reducir términos semejantes.

En efecto, $f(x + 1) = (x + 1)^2 + 3(x + 1) - 4$, aplicando binomio al cuadrado y multiplicación se obtiene $x^2 + 2x + 1 + 3x + 3 - 4$, haciendo reducción de términos semejantes se tiene, $x^2 + 5x$, por lo que la opción correcta es D).

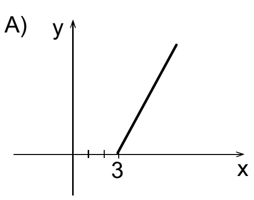
El ítem resultó de dificultad difícil, pues lo contestó correctamente el 26,5% de los estudiantes que lo abordaron y su omisión resultó muy alta, del 50,5%. Estos resultados se pueden deber a que el alumno no sabe trabajar con este tipo de preguntas, en donde tiene que encontrar la imagen de una expresión no numérica.

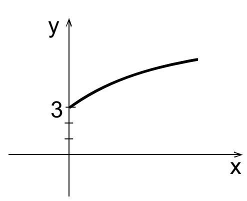
El distractor más marcado fue B), con un 10,4% de preferencias y quienes llegaron a él, lo más probable es que reemplazaron sólo en x^2, es decir,

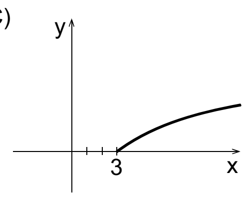
$f(x + 1) = (x + 1)^2 + 3x - 4 = x^2 + 2x + 1 + 3x - 4 = x^2 + 5x - 3$.

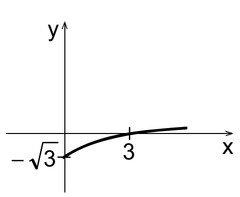
PREGUNTA 33

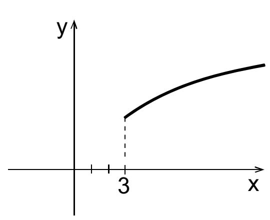
¿Cuál de las siguientes opciones representa **mejor** al gráfico de $f(x) = \sqrt{x - 3}$?

A)


B)


C)


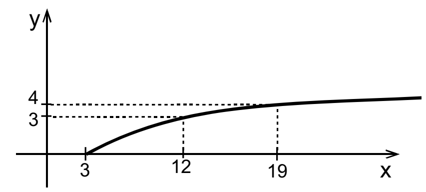
D)


E)


COMENTARIO

El contenido aquí medido es referente al gráfico de una función raíz cuadrada y el alumno para encontrar el que representa mejor a la función $f(x) = \sqrt{x - 3}$, debe determinar el dominio de la función y para esto debe saber que la cantidad subradical siempre debe ser mayor o igual que cero, es decir, $x - 3 \geq 0$, de donde se deduce que el dominio es $x \geq 3$, por lo que se descartan las opciones B) y D), ya que trabajan con $x \geq 0$.

Ahora, si se asignan valores a la variable **x** y se reemplazan en la función dada, para luego graficar en los ejes coordenados, se obtiene una curva como la de la siguiente figura:



Esta curva está mejor representada en la opción C).

Esta pregunta resultó muy difícil, la contestó bien el 14,2% de los alumnos que la abordaron y la omisión resultó alta, alcanzando al 52,2%. Estos porcentajes demuestran que el alumno no domina a cabalidad este contenido o no lo ha trabajado.

El distractor D) fue marcado por un cuarto de los estudiantes que abordaron la pregunta, seguramente los que marcan esta opción, reemplazan x por 0 y operan mal los signos, es decir, $f(x) = \sqrt{0 - 3} = \sqrt{-3} = -\sqrt{3}$ y luego reemplazan x por 3, $f(x) = \sqrt{3 - 3} = \sqrt{0} = 0$, concluyendo que el gráfico está en D).

PREGUNTA 34

Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x + a$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si $a > 1$, entonces la parábola intersecta en dos puntos al eje x.
II) Si $a = 1$, entonces la parábola intersecta en un solo punto al eje x.
III) Si $a < 1$, entonces la parábola no intersecta al eje x.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) Sólo II y III

COMENTARIO

El alumno para resolver el ítem debe realizar un análisis de cada una de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III), para ello debe recordar la gráfica de una parábola, su concavidad y su intersección con los ejes coordenados.

Antes de analizar las afirmaciones, se determinará la concavidad y el vértice de la parábola. Es así como, se debe recordar que la parábola de ecuación $y = px^2 + bx + c$ tiene concavidad hacia arriba si $p > 0$ y hacia abajo si $p < 0$, en este caso de la ecuación de la parábola dada $y = x^2 - 2x + a$, se tiene que $p = 1 > 0$, luego la parábola tiene concavidad hacia arriba.

Por otro lado, se debe recordar que el vértice de la parábola está dado por las coordenadas $\left(\frac{-b}{2p}, f\left(\frac{-b}{2p}\right)\right)$, reemplazando por p = 1 y b = –2, se tiene $\frac{-b}{2p} = \frac{2}{2} = 1$ y

$f\left(\frac{-b}{2p}\right) = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + a = -1 + a$. Luego, el vértice de la parábola es $(1, -1 + a)$.

Ahora, si se analiza I) se tiene que $a > 1$, entonces $(-1 + a) > 0$, por lo tanto el vértice de la parábola está sobre el eje x y como la concavidad es hacia arriba no intersecta a este eje. Por lo tanto, I) es falsa.

En II), como se tiene que a = 1, reemplazando en el vértice de la parábola se obtiene (1, 0), luego ésta intersecta en un sólo punto al eje x, por lo que II) es verdadera.

Al analizar III), se tiene que a < 1, por lo que la ordenada (–1 + a) será siempre un valor negativo. Como se tiene que la parábola se abre hacia arriba y el vértice está abajo del eje x, entonces la parábola lo intersecta en dos puntos. Por lo que III) es falsa.

Por el análisis anterior la clave es B).

Este ítem resultó muy difícil contestándolo correctamente sólo el 14,3% de los estudiantes y la omisión fue muy alta, cercana al 67%. Estos resultados demuestran que los alumnos no se sienten seguros de responder este tipo de preguntas, ya que se requiere de un buen análisis.

Uno de los distractores más marcado fue C), con un 7,5% de preferencias. En el caso de afirmar que I) es verdadera, los alumnos posiblemente creyeron que basta que a > 1 para que la parábola intersecte en dos puntos al eje x, sin realizar un análisis sobre la posición del vértice.

PREGUNTA 35

Si un capital C se invierte a una tasa anual de **r** por ciento de interés compuesto **n** veces al año, entonces la cantidad P en la cuenta al final de **t** años está dada por:

$$P = C\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}$$

Al invertir $ 50.000 al 6% anual de interés compuesto trimestralmente, al término de 1 año se tendrá, en pesos, una cantidad de

A) $50.000 \cdot (1,06)^4$
B) $50.000 \cdot (1,06)^3$
C) $50.000 \cdot (1,18)^4$
D) $50.000 \cdot (1,015)^3$
E) $50.000 \cdot (1,015)^4$

COMENTARIO

El tópico que se debe conocer en este ítem es el referido a cálculo de interés compuesto. El alumno debe comprender el enunciado, interpretar los datos y luego, reemplazar en la fórmula los valores dados en el enunciado.

Es así como, C se reemplaza por $ 50.000, r se reemplaza por 6, que corresponde al tanto por ciento, n por 4, porque la inversión es trimestral, es decir, cuatro veces al año y t corresponde a 1 año, porque piden la cantidad final al término de un año.

Así, se tiene $P = 50.000\left(1+\frac{6}{100 \cdot 4}\right)^{4 \cdot 1} = 50.000(1 + 0,015)^4$

Es decir, $P = 50.000(1,015)^4$, lo que indica que la alternativa correcta es E).

La pregunta la contestó bien sólo un 9% de los estudiantes, resultando con una alta omisión, del 56%, lo señalado anteriormente resulta llamativo, pues solamente debían identificar los valores y reemplazarlos en la fórmula dada.

El distractor más marcado fue B) (20%), quienes se inclinaron por él, interpretaron mal los datos del enunciado, reemplazando n por 1 y t por 3, pues como se habla de trimestre, lo interpretan como tres veces al año, es decir,

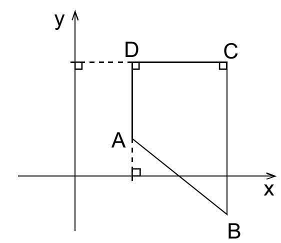
$P = 50.000\left(1+\frac{6}{100}\right)^3 = 50.000(1,06)^3$.

PREGUNTA 36

En la figura 4, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La pendiente de $\overline{AD}$ y de $\overline{BC}$ no es un número real.
II) La pendiente de $\overline{DC}$ es cero.
III) La pendiente de $\overline{AB}$ es positiva.

fig. 4

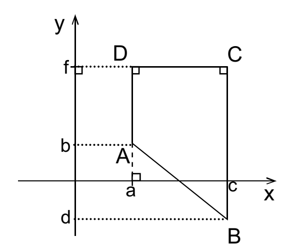


A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) I, II y III

COMENTARIO

El contenido que el postulante debe dominar para resolver el ítem es interpretación de la pendiente de una recta, para ello debe recordar que si se tienen dos puntos de la recta $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, la pendiente está dada por la expresión $m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Luego, si se designan los vértices del cuadrilátero por A(a, b), B(c, d), C(c, f) y D(a, f), como se muestra en la siguiente figura:



Para ver las pendientes de $\overline{AD}$ y de $\overline{BC}$ se tiene, $m_{\overline{AD}} = \frac{f-b}{a-a} = \frac{f-b}{0}$ y $m_{\overline{BC}} = \frac{f-d}{c-c} = \frac{f-d}{0}$, resultados que no se encuentran en los números reales. Luego, I) es verdadera.

En II), para la pendiente de $\overline{DC}$ se tiene, $m_{\overline{DC}} = \frac{f-f}{a-c} = \frac{0}{a-c} = 0$, luego II) es verdadera.

En III), para la pendiente de $\overline{AB}$ se tiene $m_{\overline{AB}} = \frac{d-b}{c-a}$, como b > d se concluye que d – b < 0 y como c > a, se concluye que c – a > 0, luego $\frac{d-b}{c-a} < 0$, lo que demuestra que III) es falsa.

Por lo tanto, la opción correcta es D), con un 29% de respuestas correctas, lo que indica que resultó un ítem de dificultad difícil. Su omisión fue cercana al 40%, considerada alta. Ambos porcentajes señalan que los alumnos no saben trabajar con pendientes cuando no se les entregan los datos en forma explícita o no saben el contenido.

El distractor con mayor preferencias por quienes erraron fue B), con un 13,2%, los postulantes no consideraron I) como verdadera, seguramente no supieron que las fracciones con denominador cero no pertenecen a los números reales.


mía sólo mía
Kuky
CLÁSICA
AHORA MÁS RICAS